Université Mohamed 1er
ENSAH - Al Hoceima

# Rattrapage d'Analyse II

CP1: Analyse II
Date: Juillet 2018
Prof. Y. Abouelhanoune

**Durée: 1h30**

## Exercice 1: (*6pt*)

1- Déterminer une équation différentielle homogène, du second ordre à coefficients constants réels telle que la fonction $xe^{3x}$ soit solution.

2- Soit l'équation différentielle $(E): \quad (e^x+1)y' - y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

2.1. Résoudre l'équation différentielle (E)

2.2. Donner la solution $y_0(x)$ telle que $y_0(0) = -\dfrac{\pi}{4}$

**Indication** : utiliser la dérivée de $\ln(1+e^x)$

## Exercice 2: (*7pt*)

Soit la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$

1- Déterminer le rayon de convergence R de cette série.

2- Soit $f(x)$ la somme de la série.

Ecrire les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ comme somme des séries entières.

3- Déduire à l'aide d'une fonction élémentaire la valeur de la somme $f(x) + f'(x) + f''(x)$

## Exercice 3: (*7pt*)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n: \ [-1,\ 1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)e^{-nx^2}$$

1- Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur [-1 1] vers une fonction $f$ que l'on déterminera.

2- Etudier la converge uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers sur [-1, 1].

3- Montrer que $\forall a \in \,]0,\ 1[\,$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur [a, 1].

**Devoir surveillé d'Analyse II.**
**Durée : 1h30**
**23/04/2019**

Prof. Younes ABOUELHANOUNE

## Exercice 1 : (5pt)

1. Montrer que la série harmonique $U_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge.
2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$U_1 = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \ln(n \sin \tfrac{1}{n}) \ ; \quad U_2 = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left( \sqrt{n^2+n} - n \right)$$

## Exercice 2 : (7 pt)

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(C) : \begin{cases} (e^x+1)y' - y = \frac{e^x}{1+x^2} \\ y_0(0) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2. Soit $(L_1)$ l'équation différentielle suivante :

$$(L_1) : y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

a- Déterminer le type de l'équation $(L_1)$ (Type Bernoulli ou bien Riccati). Justifiez votre réponse ?

b- Résoudre l'équation $(L_1)$.

## Exercice 3 : (8 pt)

On considère l'équation différentielle

$$(L_2) : y'' + 2y' + 4y = xe^x$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(L_2)$.
2. Trouver une solution particuliere de $(L_2)$, puis en déduire l'ensemble de toutes les solutions de $(L_2)$.
3. Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln(t)$$

a- On pose $g(x) = f(e^x)$, Vérifier que $g(x)$ est solution de $(L_2)$.

b- En déduire une expression de $f$.

**<u>Exercice 2 (7 points):</u>**

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}e^{-x}$

0,5pt — 1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x,y)$

0,5pt — b) Montrer que : $\forall x \geq 1: \quad |g(x,y)| \leq e^{-x}$

0,5pt — c) En déduire que la fonction : $x \mapsto g(x,y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

1pt — 2) Montrer que g est dérivable par rapport à y sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

3) Soit : $I(y) = \int_0^{+\infty} g(x,y)dx$

1pt — a) Montrer que I est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

1pt — b) Déterminer $I'(y)$.

1pt — c) Par intégration par parties, montrer que :

$$I'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

1pt — d) En déduire que :

$$\forall y\in\mathbb{R}: \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}e^{-x}dx = Arctany$$

0,5pt — e) Calculer la valeur suivante :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$$

**<u>Exercice 3 : (6 points)</u>**

1) Considérons le champ vectoriel:

$$\vec{V}(x,y,z) = (yz^2, \quad xz^2 + z, \quad 2xyz + 2z + y)$$

1pt — a) Déterminer $\overrightarrow{rot}\vec{V}$.

2pt — b) En déduire que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel et déterminer ses potentiels.

1pt — c) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'hélice H paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 2t \end{cases} \quad avec\ t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

2pt — 2) Calculer le volume du domaine :

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \quad x^2+y^2 \leq z^2 \ et\ 0 \leq z \leq 1\}$$

**Bon Courage !!**

Durée : 2h.
Session juin 2019

Prof. Younes ABOUELHANOUNE

INDH

**Il est demandé de rédiger avec clareté et rigueur.**

---

## Exercice 1 : (2.5pt)

On considère l'équation différentielle $(L)$ :

$$(L): \quad \{ \; x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$$

1. Résoudre l'équation différentielle (L).
2. Trouver la solution sur $]0;+\infty[$ vérifiant $y(1) = 0$.

## Exercice 2 : (6pt)

1. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$U_1 = \sum_{n\succeq 1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)} \quad ; \quad U_2 = \sum_{n\succeq 1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}+\cos(n)}{\ln(n)+n^2} \quad ; \quad U_3 = \sum_{n\succeq 3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n^3)}$$

2. Calculer la somme de la série suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

## Exercice 3 : (7.5pt)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\succeq 1}^{+\infty} f_n(x)$ avec

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n\succeq 1}^{+\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue.

3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Calcule $f'(x)$ la dérivée de la série

$$f'(x) = \left(\sum_{n\geq 1}^{+\infty} f_n(x)\right)'$$

5. Vérifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

## Exercice 4 : ( 4pt)

1. Déterminer le rayon de convergence des série entières de terme généraux :

$$a_n = \left(\cos(\tfrac{1}{n})\right)^n \; ; \quad b_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}$$

a- Développer la fonction $f(x)$ en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence $R$.

b- Quel est le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?